Wykaż, udowodnij

1. Udowodnij, że jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 8, to suma cyfr jedności podwojonej cyfry dziesiątek i 4-krotności cyfry setek, jest podzielna przez 8.

2. Udowodnij, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, to ich różnica jest także liczbą parzystą.

3. Wykaż, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych różniących się o 2, jest podzielna przez 8.

4. Udowodnij, że suma liczby dwucyfrowej i liczby utworzonej z tych samych cyfr zapisanych w odwrotnej kolejności jest podzielna przez 11.

5. Udowodnij, że różnica czwartych potęg dwóch liczb, z których pierwsza przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, a druga resztę 2, jest wielokrotnością pięciu.

6. Udowodnij, że jeśli n oznacza liczbę naturalną, to wyrażenia n^3+5n, n^3+11n; n^3-19n są liczbami podzielnymi przez 6.

7. Udowodnij, że liczba postaci n^5+5n^3+4n, *gdzie* $n \in \mathrm{N}$ dzieli się przez 120.

8.Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2.

9. Udowodnij, że ułamek, którego licznik jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych, a mianownik jest iloczynem trzech kolejnych liczb parzystych, jest skracalny przez 24.

10.Liczbę 1 napisz w postaci sumy ułamków prostych o różnych mianownikach .

11. Udowodnij, że dla $n \in N$ ułamek $\frac{14n+3}{21n+4}$ jest nieskracalny.

12. Trzej strzelcy strzelają do celu na strzelnicy. Pierwszy oddaje strzały w odstępach 6 sekundowych, a drugi i trzeci odpowiednio 8 i 10 sekundowych. Ile razy strzelcy wystrzelają jednocześnie w ciągu 15 minut licząc od pierwszego strzału, który wszyscy trzej oddali jednocześnie?

13. Wykazać, że wyrażenie $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ jest liczbą naturalną dla każdego n parzystego.

14. Jaką cyfrę należy wstawić w miejsce kropki w czterocyfrowej liczbie 777. , aby powstała liczba podzielna przez 6?

15. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

16. Dowieść, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych nie jest liczbą parzystą.

17. Wykaż, że suma trzech kolejnych naturalnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 13.

18. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

$5^{n} + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ dzieli się przez 155 .

19. Dowieść, że liczba:

a) $17^{5} + 24^{4} - 13^{21}$ jest wielokrotnością 10

b) $2^{16} + 3^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^{7}$ jest wielokrotnością 10

20.Jaka jest cyfra jedności liczby a, jeśli $a=5^{12}+10^{15}+9^{11}$?

21.Jaką cyfrą kończy liczba $a = 3^{13} + 10^{13} + 18^{13}$ po wykonaniu działań?

22. Wykaż, że liczba postaci:

a) $2^{16} + 2^{15} + 2^{12}$ – jest podzielna przez 5

b) $3^{18} + 6^{17}$ – jest podzielna przez 5

c) $8^{9} - 4^{15} + 2^{32} + 16^{7}$ – jest podzielna przez 3

d) $6^{5} - 12^{3} - 24^{2}$ – jest podzielna przez 19

Potęgi i pierwiastki.

Zad 1.Oblicz:

a) $$\frac{3^{47} \odot 3^{73} \odot 3^{24}}{(3^{15})^{8} \odot 3^{31} \odot (\frac{1}{3})^{12}}$$

b) $36 \odot 18^{n} - 8 \odot 2^{n-4} \odot 9^{n} - 3^{n+1} \odot 6^{n+1}) : 18^{n-1}$

c) $$\frac{2^{19} \odot 27^{3} + 15 \odot 4^{9} \odot 9^{4}}{6^{9} \odot 2^{10} + 12^{10}}$$

d) $(10^{12} + 5^{11} \odot 2^{9} - 5^{13} \odot 2^{8}) : (4 \odot 5^{5} \odot 10^{6})$

e) $$\frac{5 \odot 4^{15} \odot 9^{9} - 4 \odot 3^{20} \odot 8^{9}}{5 \odot 2^{9} \odot 6^{19} - 7 \odot 2^{29} \odot 27^{6}}$$

f) $$\frac{2^{32} - 8^{9} - 4^{15}}{2^{28}}$$

g) $$\frac{9^{6} + 81^{2} \cdot 9^{3}}{3^{10} - 9^{9} + 27^{6}}$$

h) $$\frac{(2^{3})^{5} \cdot 3^{3} \cdot 6^{5}}{(2^{2})^{8} \cdot (3^{2})^{3} \cdot 6}$$

i) $$\frac{(6\frac{1}{2})^{3} \cdot 4^{3} - (9\frac{1}{3})^{3} \cdot 3^{3}}{13^{3} - 14^{3}}$$

j) $$\frac{7^{8} : 49^{2} \cdot 5^{4} + 49 \cdot 125 : \frac{1}{5}}{(7 \cdot 5)^{4} : 7^{4}}$$

k) $$\frac{216 : 6^{2} \cdot 9 - 48 : 12 \cdot 3^{3}}{81 - 3 \cdot 18 \cdot 5} + \frac{5}{7}$$

l) $2^{10} \cdot (\frac{1}{8})^{3} + 5^{4} \cdot 25^{-1} + 64^{-1} \cdot 2^{10}$

ł) $2^{8}(\frac{1}{2})^{3} + 2 \cdot 5^{4} \cdot (\frac{1}{5})^{3} + (4^{-1})^{2} \cdot 2$

m) $(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^{2}$

Zad 2. Sprowadź wyrażenie do najprostszej postaci wykonując odpowiednie działania:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

Zad 3.Napisz w postaci jednej potęgi liczbę:

a) $2 \odot 4^{11} + 3 \odot 4^{12} + 2 \odot 4^{10}$

b) $2 \odot 3^{12} + 3 \odot 9^{6} + 4 \odot 27^{4}$

Zad 4. Które z wyrażeń jest większe i o ile:

a) $A = 16 \odot 0{,}25^{3n-2} :(-\,0{,}5 \odot 0{,}25^{3n-4})$

$B = 81 \odot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-4n} \odot 3 \left(-\frac{2}{3}\right)^{4n-7}$

b) $A = -4 \odot 0{,}5^{2n-7} \odot (12 \odot 0{,}5^{10-2n})$

$B = 27 \odot \left(\frac{1}{3}\right)^{5n-1} : \left(0{,}5 \odot \left(\frac{1}{3}\right)^{5n-3}\right)$

Zad 5. Nie obliczając wartości liczbowej danych wyrażeń, ustaw je w kolejności rosnącej:

$3^{10} \cdot 2^{13}$; $2^{14} \cdot 3^{11}$; $2^{11} \cdot 3^{13}$; $2^{15} \cdot 3^{12}$; $2^{16} \cdot 3^{10}$; $2^{11} \cdot 3^{12}$.

Zad 6. Jaką cyfrę ma w rzędzie jedności każda z podanych liczb:

a) 2^{49}; b) 3^{60}; c) 5^{138}; d) 4^{123};

e) 6^{94}; f) 7^{63}; g) $2 \cdot 5^{49} + 3$;

h) $3 \cdot 9^{14} - 6^{28}$.

Procenty

Zad 1. Bok kwadratów wydłużono o 10%. O ile procent zwiększy się pole tego kwadratu?

Zad 2. Mamy dwa różne kwadraty. Długość boku jednego z nich jest większa o 20% od długości boku drugiego kwadratu. O ile procent pole pierwszego kwadratu jest większe od pola drugiego kwadratu?

Zad 3. Na kwadratowej działce o powierzchni 1 ara założono klomb, którego bokami były odcinki łączące środki boków działki. Oblicz pole powierzchni klombu?

Zad 4. Od dwóch kawałków stopu o różnej zawartości procentowej miedzi ważących 10 kg i 8 kg, odcięto jednakowe wagowo kawałki. Każdy z odciętych kawałków stopiono z pozostałą resztą drugiego stopu i okazało się, że procentowa zawartość miedzi w otrzymanych stopach jest jednakowa. Ile ważył każdy z odciętych kawałków?

Zad 5. Do suszarni dostarczono 510 kg świeżych grzybów zawierających 90%wody. Po wysuszeniu grzyby zawierały 15% wody. Ile kilogramów suszonych grzybów otrzymano?

Zad 6. Bok sześcianu zwiększono o 10% jego długości. Oblicz o ile procent zwiększy się jego objętość.

Zad 7. W pewnym prostokącie jeden z boków skrócono, a drugi wydłużono o *p%* tak, że w rezultacie pole prostokąta zmniejszyło się o 8%.
Oblicz *p*.

Zad 8. Morska woda zawiera 5% soli. Ile kg słodkiej wody należy dodać do 40 kg morskiej wody, aby woda zawierała 2% soli?

Zad 9. O ile procent zmniejszyłaby się dzienna produkcja gdybyśmy chcieli bez zwiększenia wydajności pracy przejść z 8-godzinnego dnia na
7-godzinny? O ile procent należałoby zwiększyć wydajność pracy, aby dzienna produkcja nie uległa zmianie?

Zad 10. Fabryka produkuje w ciągu 30 dni roboczych 600 sztuk wyrobów.
O ile procent należy zwiększyć dzienną produkcję, aby wykonać taką samą ilość wyrobów w ciągu 26 dni roboczych?

Zad 11. Cena towaru wzrosła najpierw o 10%, a następnie zmalała o 10%.
O ile % pierwotnej ceny towaru zmieniła się jego cena ostateczna?

Zad 12. Księgarnia płaci wydawnictwu 90% ceny wydrukowanej na okładce książki, a sprzedaje ją po cenie wydrukowanej na okładce.
Ile % wynosi zysk księgarni?

Zad 13. Na wycieczkę pojechało n uczniów, co stanowi p% liczby uczniów w tej klasie. Ile uczniów tej klasy nie pojechało na wycieczkę?

Zad 14. Antykwariat zakupił dwa przedmioty za 2250 złotych, a na ich sprzedaży zyskał 40% tej kwoty. Za ile złotych zakupił antykwariat każdy przedmiot jeżeli pierwszy dał 25%, a drugi 50% zysku?

Zad 15. W fabryce było zatrudnionych 1440 pracowników (mężczyzn i kobiet).
Za wzorowe wykonanie pracy premię otrzymało 18,75% wszystkich mężczyzn oraz 22,5% wszystkich kobiet. Kierownictwo fabryki podało
do wiadomości, że premiami wyróżniono 20% wszystkich pracowników. Ilu mężczyzn i ile kobiet pracowało w fabryce?

Zad 16. Cena biletu na mecz piłki nożnej wynosiła 150zł. Gdy cenę obniżono okazało się, że na mecz przychodzi o 50% widzów więcej,
a dochód ze sprzedaży biletów na jeden mecz wzrósł o 25%. O ile obniżono cenę biletu?

Zad 17. Bartek i Tomek chodzą do klasy, w której chłopcy stanowią nie mniej niż 93% i nie więcej niż 94% liczby wszystkich uczniów klasy. Ile osób liczy klasa, jeżeli wiadomo, że chłopców jest mniej niż 38, a różnica między liczbą chłopców i dziewcząt jest liczbą pierwszą.

Równania, nierówności, układy równań.

Zad 1. Samochód przejechał odległość od miasta A do miasta B ze średnią prędkością 60 km/h, a wracał od B do A ze średnią prędkością 40 km/h. Jaka była średnia prędkość samochodu na całej trasie (tam i z powrotem)?

Zad 2. Jeżeli pewną liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 7. Jeżeli zaś odejmiemy od niej 27, to otrzymamy liczbę o przestawionych cyfrach. Co to za liczba?

Zad 3. Maszynistka obliczyła, że jeżeli będzie codziennie pisać o dwie strony więcej tekstu od ustalonej normy, to przepisze cała pracę o trzy dni wcześniej od przewidywanego terminu, a jeśli będzie pisać o cztery strony więcej od ustalonej normy, to przepisze pracę o pięć dni wcześniej od wyznaczonego terminu. Ile stron miała ona przepisać i w jakim czasie?

Zad 4. W kongresie uczestniczyło 1000 osób: w tym 900 osób znało język angielski, 750 osób znało język francuski, 700 osób znało język rosyjski, 651 osób znało język niemiecki. Wykaż, że przynajmniej 1 uczestnik kongresu władał wszystkimi czterema wymienionymi językami.

Zad 5. Jan dał Pawłowi 1/3 swoich pieniędzy, następnie Paweł dał Andrzejowi ¼ wszystkich pieniędzy, które miał po otrzymaniu pieniędzy od Jana, następnie Andrzej dał Janowi 0,1 wszystkich pieniędzy, które miał po otrzymaniu pieniędzy od Pawła. Ostatecznie każdy miał po 90 złotych. Ile pieniędzy miał każdy z nich na początku?

Zad 6. Pociąg pośpieszny o długości 80 metrów, jadący z prędkością 72 km/h, mija jadący w tą samą stronę pociąg osobowy o długości 120 metrów w ciągu 20 s. Jaka jest prędkość pociągu osobowego?

Zad 7. Gaweł mówi do Pawła: ”Mam 3 razy więcej lat, niż ty miałeś wtedy, kiedy ja miałem tyle lat, ile ty masz teraz. Kiedy osiągniesz mój wiek, będziemy miel razem 112 lat”.

Zad 8. Z miasta A wyszedł turysta i idzie do miasta B, przy czym dziennie przebywa on drogę równą 28 km. W tym samym czasie z miasta B do A wyszedł drugi turysta, który dziennie przebywa drogę równą 24 km. Droga z miasta A do B wynosi 260 km. Po ilu dniach turyści się spotkają?

Zad 9. Butelka z korkiem kosztuje 1,10 złotych. Butelka jest o 1 zł droższa od korka. Ile kosztuje butelka, a ile korek?

Zad 10. Ze zbiornika, w którym było 133 litry benzyny odlano tyle, że pozostało w nim 5,(3) mniej litrów benzyny niż zostało odlane. Ile litrów benzyny odlano?

Zad 11. Ojciec ma 48 lat, syn 21. Przed ilu latu ojciec był 10 razy starszy od swego syna?

Zad 12. Magazynier mówi: „Gdybym ze składu wydał połowę towaru i jeszcze jedną sztukę, prócz tego usunął 10 sztuk nieudanych wyrobów, zostałoby mi wtedy w magazynie trzecia część początkowej ilości towaru oraz siedem całych sztuk i 2/3 sztuki”. Ile sztuk towaru miał magazynier na składzie?

Zad 13. W starej egipskiej księdze Ahmesa (r. 1700 przed n.e.) znajdujemy takie zadanie: Wędrowiec policzył, że w stadzie, które pędzi pasterz na pastwisko, jest 70 sztuk bydła. Zapytał on pasterza, jaką część swojego licznego stada pędzi na pastwisko. Pasterz odpowiedział: „Prowadzę na pastwisko 2/3 trzeciej części stada, które powierzono mojej opiece”. Obliczyć, jak wielkie miał on stado.

Zad 14. Wskazówki zegara wskazują dokładnie godzinę 9. Obliczyć po ilu minutach od tej chwili licząc, wskazówka minutowa dogoni wskazówkę godzinową.

Zad 15. Do zbiornika dopływa woda czterema rurami, przy czym gdyby woda dopływała tylko pierwszą rurą, zbiornik napełniłby się w ciągu 1dnia, drugą w ciągu 2 dni, trzecią w trzy dni, a czwartą w 4 dni. Obliczyć, w jakim czasie napełni się zbiornik, gdy woda będzie dopływała wszystkimi czterema rurami jednocześnie.

Zad 16. Po torze kołowym jadą dwaj rowerzyści. Gdy jadą w przeciwnych kierunkach spotykają się co 10 sekundach. Gdy zaś jadą w kierunku zgodnym spotykają się co 170 sekund. Z jakimi prędkościami jadą rowerzyści, jeżeli długość toru kołowego wynosi 170 metrów?

Zad 17. W czasie 3 godzin samolot przeleciał z wiatrem drogę o długości 1134 km. Lecąc pod wiatr z taką samą prędkością samolot przeleciał w czasie 1 godziny 342 km. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka prędkość wiatru?

Zad 18. Stefan mówi do Jana: „Gdy dam tobie 1 zł, to będziemy mieli obydwaj tę samą ilość pieniędzy, a gdy ty mi dasz 2 zł, to będę miał dwa razy tyle pieniędzy co ty”. Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?

Zad 19. Osioł i wielbłąd niosły worki z wodą. Gdyby z osła zdjąć jeden worek i dodać wielbłądowi, wtedy wielbłąd niósłby dwa razy tyle worków co osioł. Gdyby zaś zdjąć jeden worek z wielbłąda i dodać osłu, wtedy obydwa zwierzęta niosłyby jednakową liczbę worków. Ile worków niósł wielbłąd, a ile osioł?
Zad 20. Wiek pewnego obywatela w roku 1887 równał się sumie cyfr roku jego urodzenia. Ile miał on lat?

Zad 21. Do basenu doprowadzono wodę trzema rurami. Gdyby woda dopływała rurą A przez 5 h, rurą B przez 2 h oraz rurą C przez 3 h, do basenu napłynęło 180 m^3 wody. Gdy woda dopływała do basenu rurą A przez 3 h, rurą B przez 2 h i rurą C przez 1 h, do basenu napłynęło 100 m^3 wody. Gdy natomiast woda dopływała do basenu rurą A przez 6 h, rurą B przez 4 h i rurą C przez 3 h, to do basenu napłynęło 230 m^3 wody. Ile wody w czasie 1 h dopływa do basenu każdą rurą?

Zad 22. Kieliszek ma masę 10 dag. Flaszka i kieliszek mają razem taką samą masę jak dzbanek. Flaszka ma taką samą masę jak kieliszek i talerzyk, a dwa dzbanki mają masę równą masie trzech talerzyków. Jaką masę ma flaszka?

Zad 23. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki o długości 12 cm i 3 cm. Oblicz pole powierzchni tego trójkąta.

Zad 24. Oblicz pole trójkąta, którego boki mają długość 17 cm, 25 cm , 28 cm.

Zad 25. Aleksander Wielki zmarł w kwiecie wieku. Gdyby żył o pięć lat krócej, to panowałby $\frac{1}{4}$ swego życia. Gdyby zaś żył o 9 lat dłużej, to panowałby $\frac{1}{2}$ swego życia. Ile lat żył a ile panował Aleksander Wielki?

Zad 26. Trzej rolnicy kupowali drzewka. Jeden kupił $\frac{1}{3}$ wszystkich drzewek i jeszcze 32 drzewka, drugi $\frac{1}{3}$ pozostałej ilości i jeszcze 32 sztuki, natomiast trzeci $\frac{1}{3}$ pozostałych drzewek i ostatnie 32 drzewka. Ile drzewek kupił każdy z rolników?

Zad 27 .Rozwiąż równania:

a) $(x + 3^{75})^2 - (x - 3^{75})^2 = 4 \cdot 3^{75}$

b) $\frac{2^x}{8} = 4$

c) $(\frac{2}{5})^{x-3} = (\frac{5}{2})^{3x-1}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 10$

e) $\frac{1}{3}(\frac{1}{3}(\frac{1}{3}(\frac{1}{3}(\frac{1}{3}(x + 2) + 2) + 2) + 2) + 2) = 1$

f) $(x + 2^{1997})^2 - (x - 2^{1997})^2 = 2^{1999}$

g) $25^x \cdot (\frac{1}{125})^{x-1} = 625$

Zad 28. Rozwiąż równania:

a) $|x - 2| + 2x = 2$
b) $|x + 4| + |x - 1| = 5$
c) $|x| = 3(x - 3)$
d) $|x + 2| + |x - 1| = 3$
e) $|2x + 1| + |3x - 1| = 2$
f) $|x + 3| - |x - 2| = 1$
g) $|4x - 1| + |1 - 3x| = 3$
h) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = 6$
i) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{25 - 10x + x^2} = 2$

Zad 29. Rozwiąż równania:

a) $288 : [144 - \frac{(x-16)\cdot 4}{7}] + 108 = 111$
b) $208 : [112 - \frac{(100-3x)\cdot 4}{23}] = 2$
c) $315 : [36 - (\frac{432}{5x-198} + 15)] = 21$

Zad 30. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce Δ w równaniu

$$x^2 + 5(3x + \Delta)(x + 1) - 4(1 + 2x)^2 = 84$$

aby liczba 2 była rozwiązaniem tego równania?

Zad 31.Podaj wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność $\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} < x$

Zad 32.Rozwiąż nierówności:

a) $|5 - 2x| < 1$
b) $|3x - 2{,}5| \geq 2$
c) $|x - 2| \leq |x + 4|$
d) $2|x + 1| > x + 4$
e) $|x + 2| - |x| > 1$
f) $|2x + 6| + |3x - 12| + |x| < 20$

Zad 33. Zaznacz na osi liczbowej następujące zbiory:

a) $\{x \in R: (x + 1)^2 < (x + 2)^2$ i $|x| < 2\}$

b) $\{x \in R: |x + 2| < 3$ i $|2x - 3| < 2\}$

c) $\{x \in R: |x - 1| + x < 1$ lub $3x > 2 - \frac{2x-13}{11}\}$

Zad 34. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{-3}{3x^3+6x^2+3x+6} < 0$$

Zad 35.Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=24 \\ 2x^2+5y^2=55 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y+z=10 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=35 \\ 3x^2-y^2=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3(x-1)+2(y-2)+(z-7)=-8 \\ x+2y+7z=10 \\ x-y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y-2z=2 \\ 3(x+1)-2(y+\frac{1}{2})+4z=6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x+y-7z=0 \\ 5x-2z=3 \\ 3x-y+2z=3 \\ 3x+2y-10z=-3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y+x-1=0 \\ |y|-x-1=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} |x|+2|y|=3 \\ 7x+5y=2 \end{cases}$

Zad 36. Rozwiąż następujące układy nierówności i zilustruj rozwiązania na osiach liczbowych:

a) $\begin{cases} 2x+4>3-x \\ 4-3x>2+2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1-2x}{3}<\frac{1+3x}{4} \\ 1-7x \geq -6x \end{cases}$

Zad 37. Rozwiąż nierówność podwojoną:

a) 2x + 5 < 3x + 4 < 4x + 2

b) 2(x – 1) < 3(x – 1) < 4(x – 1)

Zad 38.Rozwiąż równanie i zbadaj dla jakich wartości parametru *a* równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, nie ma rozwiązań, jest tożsamościowe.

a) 5x = 3 + ax c) ax + 2a = 3ax

b) ax – 3 = 7ax d) ax + 3 = 3a

Zad 39.Obwód równoległoboku wynosi *m* cm; a jeden jego bok jest o *n* cm dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków równoległoboku.

Zad 40. Zbadaj dla jakich wartości parametrów *m* każdy z układów równań:

a) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+my=2m \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ mx-y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a-1)x+2y=1 \\ 3x-(a+1)y=a \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=m+1 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$

jest układem równań niezależnych, zależnych, sprzecznych.

Zad 41. Dla jakich wartości k rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x+y=2k \\ x-y=3-k \end{cases}$$

jest:
a) para liczb ujemnych;
b) para liczb dodatnich;
c) para liczb o różnych znakach?

Funkcje

Zad 1. Wyznacz wartość k, aby proste $y = 4$, $y=\frac{1}{2}x$, $y = kx$ ograniczały trójkąt o polu równym 60.

Zad 2. Wyznacz wartość m, aby proste $y = -\frac{1}{2}x + 8$, $y = mx + 8$ oraz oś OX ograniczały figurę o polu równym 80.

Zad 3. Dla jakiej wartości k punkt przecięcia wykresów funkcji
$y = 3x - k$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$ należy do I ćwiartki?

Zad 4. Znajdź wzór funkcji liniowej f, która spełnia następujący warunek
$f(x+2) - f(x) = 6$, dla $x \in R$ i $f(0) = 2$.

Zad 5. Wyznacz te wartości p, dla których wykres funkcji $y = px + 4$ przecina oś odciętych w takim punkcie A, a oś rzędnych w takim punkcie B, że $|BO| = 4 \cdot |AO|$.

Zad 6. Dla jakich liczb całkowitych a i b funkcje $y = 2x + b$ i $y = ax + 3$ mają to samo miejsce zerowe?

Zad 7. Prosta o równaniu $x + y - 5 = 0$ przecina oś odciętych w punkcie A i oś rzędnych w punkcie B. Prosta $y = -x + 2$ przecina oś rzędnych w punkcie C i oś odciętych w punkcie D. Narysuj te proste i oblicz pole czworokąta ABCD. Oblicz odległość między prostymi AB i CD.

Zad 8. Podaj współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji $y = x + |x|$ i $y = -|x| + 6$.

Zad 9. Sporządź wykres funkcji $y = |x+3| + |x-3| - 5$.

Zad 10. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji
$y = |2x-1|$ i $y = 10$.

Zad 11. Sporządź wykres funkcji $y = \frac{|x|}{x}$, dla $x \in R \setminus \{0\}$.

Zad 12. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -4, dla\, x < -2 \\ 2x, dla\, -2 \le x < 1 \\ 2, dla\, x \ge 1. \end{cases}$

Zad 13. Dane są proste o równaniach:

$y = x + m$ i $y = mx - 4$.

Dla jakich wartości m punkt przecięcia prostych należy do wykresu funkcji
$y = 2x - 2$?

Geometria

Zad 1. Kwadrat i koło mają obwody równe a. Zbadaj która z tych figur ma większe pole.

Zad 2. Każdy bok kwadratu jest średnicą koła. Wspólna część tych kół tworzy wewnątrz kwadratu rozetę czterolistną. Oblicz pole tej rozety, jeżeli bok kwadratu ma długość 8 cm.

Zad 3. W trójkącie równoramiennym ABC poprowadzono wysokość BD i na przedłużeniu wysokości obrano punkt K tak, że BK = AC. Punkt K połączono z punktami A i C. Dowieść, że suma kątów ABC i AKC jest równa 210°.

Zad 4. W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i odłożono odcinki AD = AC oraz BE = BC. Uzasadnij, że kąt DCE = 135°.

Zad 5. W trójkącie równoramiennym kąt między dwusieczną kąta przy wierzchołku i dwusieczną kąta przy podstawie równa się 130°. Oblicz kąty tego trójkąta.

Zad 6. W trójkącie prostokątnym punkt styczności okręgu wpisanego dzieli przeciwprostokątna na odcinki 5 cm i 12 cm. Znaleźć długości przyprostokątnych tego trójkąta.

Zad 7. Oblicz długość ramienia i przekątnej trapezu równoramiennego o podstawach długości 20 cm i 12 cm. Wiedząc, że środek okręgu opisanego leży na większej podstawie trapezu.

Zad 8. Czy w garnku o średnicy 24 cm zmieszczą się cztery słoiki o średnicy 10 cm każdy?

Zad 9. Udowodnij, że środkowe trójkąta dzielą trójkąt na sześć części o równych polach.

Zad 10. W trapezie ABCD połączono środek ramienia BC z wierzchołkami A i D. Udowodnij, że pole trójkąta AED jest równe połowie pola trapezu.

Zad 11. Zbuduj sześciokąt foremny mając odległość jego dwóch równoległych boków. Opisz konstrukcje.

Zad 12. Ile przekątnych ma dowolny wielokąt wypukły?

Zad 13. Ile przekątnych ma siedmiokąt wypukły?

Zad 14. Ile boków ma wielokąt o 90 przekątnych?
Zad 15. Kąt wielokąta foremnego ma miarę 150°. Ile boków ma ten wielokąt?

Zad 16. Ile boków ma wielokąt wypukły, którego suma miar kątów wynosi 1620°?

Zad 17. Mając dane odcinki a, b, c, d, skonstruuj trapez.

Zad 18. Kąt 54° podziel na trzy równe części.

Zad 19. Dany jest kąt, którego miara jest równa 66° (narysuj go za pomocą kątomierza). Za pomocą cyrkla i linijki podziel ten kąt na 11 równych kątów.

Zad 20. Narysuj trójkąt o kątach o mierze 45° i 60° i wpisz w niego okrąg. Połącz punkty styczności i oblicz wszystkie miary kątów utworzonego trójkąta (bez pomocy kątomierza), uzasadniając wynik.

Zad 21. Jeden pierścień kołowy wyznaczony jest przez okrąg wpisany w trójkąt równoboczny o boku a i przez okrąg opisany na tym samym trójkącie. Drugi pierścień kołowy wyznaczony jest przez okrąg wpisany w kwadrat o boku a i przez okrąg opisany na tym kwadracie. Udowodnij, że pola otrzymanych pierścieni są równe.

Łamigłówki matematyczne

Zad 1. Farmer Giles sprzedał trzy owce i kupił dwie świnie, dokładając do transakcji 20 funtów. Następnie sprzedał dwie owce i kupił jedną świnię, w tej drugiej transakcji wychodząc na zero. Wszystkie owcy miały tę samą cenę i wszystkie świnie kosztowały tyle samo. Jaka była cena owcy? Ile kosztowała świnia?

Zad 2. Jaki jest następny wyraz ciągu?

155, 210, 225, 240, ?

Zad 3. W turnieju gry w rzutki jednemu z zespołów brakowało 72 punktów do zwycięstwa. Kapitan zespołu wykonał pierwszy rzut i powiedział:

- Suma wieku moich trzech córek jest równa mojemu wynikowi. Iloczyn natomiast jest równy 72.

Jego przeciwnik odparł:

- Nie mogę na tej podstawie ustalić ich wieku.
- No cóż, moja najstarsza córka ma na imię Natalia – dodał kapitan.
- Teraz już wiem, w jakim wieku są twoje córki – odparł przeciwnik.

W jakim wieku są córki kapitana?

Zad 4. Jaka jest następna liczba tego szeregu?

4, 8, 15, 30, 37, 74, ?

Zad 5. Niewiele jest przypadków, kiedy suma kilku liczb całkowitych dodatnich jest równa iloczynowi tych liczb. Na przykład:

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

Ile takich przypadków potrafisz znaleźć?

Zad 6. Stwierdzono, że w grupie 100 pań 85 miało białą torebkę, 75 czarne buty, 60 parasolkę, a 90 pierścionek. Ile co najmniej pań musiało mieć każdy z wymienionych przedmiotów?

Zad 7. Ile minut brakuje do 12:00, jeżeli 50 minut temu było cztery razy tyle minut po 9:00?

Zad 8. Wstaw odpowiednie cyfry w miejsce liter w poniższym dzieleniu:

GG
GLUM : SAD
GUM
GUM
GUM

Zad 9. Synek mojego przyjaciela powiada:

- Trzy lata temu byłem siedem razy starszy od mojej siostry, dwa lata temu byłem od niej starszy czterokrotnie. Ile lat mają dzisiaj syn mego przyjaciela i jego córka?

Zad 10. Podczas wycieczki po Wyspie Zagadkowej natknąłem się na fermę drobiu. Spytałem pana Rabackiego, z iloma kurczętami i iloma kaczątkami rozpoczął hodowlę. Oto jego odpowiedź:

- Z dwudziestoma pięcioma maleństwami, w sumie. Dzisiaj mam 8 razy więcej drobiu, a przyrost kurczaków jest trzy razy większy niż przyrost kaczek. Z iloma kurczętami i iloma kaczkami rozpoczął hodowlę pan Rabacki oraz ile kurcząt i ile kaczek ma obecnie?

Zad 11. Jeśli 40 krów zje cała trawę z pastwiska w 20 dni, a 30 krów w 30dni, to ile dni będzie trwało zjadanie całej trawy przez 25? Zakładamy, że trawa rośnie ze stałą prędkością.

Zad 12. Dabacki jest dwukrotnie starszy od ekonomisty. Abacki jest o 12 lat młodszy od technologa. Babacki jest o 7 lat starszy od Abackiego.
Cabacki jest o 8 lat młodszy od konstruktora. Technolog nie jest najstarszy. Ile lat ma zaopatrzeniowiec, kto jest konstruktorem?

Zad 13. Gdy z sali wyszło pięciu studentów, stojący obok asystent powiedział do profesora - dziwne, że nie weszła jeszcze ani jedna studentka. Nie takie dziwne – odpowiada profesor – szanse na to, że tak będzie, wynosiły dokładnie 50%. Ilu studentów i ile studentek było w sali?

Zad 14. W restauracji przy trzech stolikach goście witali się uciskiem dłoni (każdy z każdym przy danym stoliku). Łącznie wymieniono 16 uścisków. Ile gości było przy każdym stoliku?

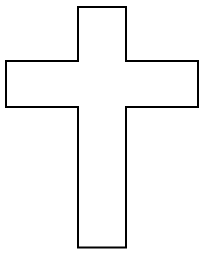
Zad 15. Mój zegarek źle chodzi. Nie wiem jednak, czy się późni, czy się śpieszy; wiem tylko, że wskazówki mojego zegarka pokrywają się co 65 minut. Czy mój zegarek późni się, czy śpieszy, i o ile na dobę?

Zad 16. Profesor Żabacki twierdzi, że pole trójkąta równa się jego obwodowi. Jakie są wymiary trójkątów, wyrażające się liczbami całkowitymi, które spełniają to twierdzenie?

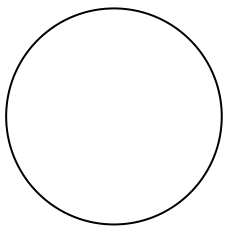
Zad 17. Trójkąt o bokach AA, BC, CB jest prostokątny. Jakie są liczbowe długości jego boków.

Zad 18. Jaki największy sześcian można zbudować z jednego kawałka blachy w kształcie kwadratu o boku 6 cm?

Zad 19. Rozetnij krzyż na pięć części, z których można zbudować kwadrat.



Zad 20. Trzema liniami równej długości podziel koło na cztery części o równych polach.



Zad 21. Dwa zegary A i B, bijąc równocześnie, wybiły 19 razy. Jak określić godzinę, którą wskazywały, skoro wiadomo, że początek bicia godziny na zegarze A spóźnił się w stosunku do zegara B o 2 sekundy i że zegar A uderza co trzy sekundy, a zegar B co 4 sekundy?

Zad 22. Pewna osoba zgubiła woreczek pełen dwudziestogroszówek. Nie wiedziała dokładnie, ile monet zawierał woreczek; pamiętała jedynie, że gdy przeliczyła monety po 2, po 3 i po 5, pozostawała jej zawsze jedna moneta, gdy zaś przeliczyła je po 7, nic jej nie zostawało. Ile pieniędzy było w woreczku?

Zad 23. Gwiazdki zastąpić cyframi.

* 8 4 *	5 * 1 7	3 * 5 7
+2 * * 3	+ * 4 * 8	- * 9 8 *
6 5 2 9	6 8 1 *	4 * 6

Zad 24. Dwaj przyjaciele kupili wspólnie 8-litrowy słoik soku. Ten, który sok kupił, ma zatrzymać ów słoik z połową jego zawartości. Drugi jednak ma tylko dwa pojemniki o zawartości 5 litrów i 3 litrów. W jaki sposób można dokonać podziału posługując się owym słoikiem i dwoma pojemnikami.

Zad 25. W hurtowni znajduje się herbata w paczkach po 16 kg, 17 kgi i 40 kg. Czy można kupić 100 kg herbaty bez rozpakowania paczek?

Zad 26. Wstaw odpowiednie cyfry w miejsce liter w poniższych działaniach:

```
   I C C        I N U       E M A
 x   I N      x   N U     ---------
 ---------    ---------   U E M A   : M A
   N T T        L N U     M A
  I C C       N U S       ---------
 ---------    ---------     T M
 I A N T      O I N U       A S
                          ---------
                           E M A
                           E M A
                          ---------
```

Zad 27. Czy może płaskie zwierciadło dać kiedykolwiek obraz powiększony?

Zad 28. Z podanych tu dziewięciu cyfr wykreślić należy sześć cyfr w taki sposób, żeby suma pozostałych wynosiła 20.

1 1 1
7 7 7
8 9 9

Zad 29. W bibliotece stoją dwa wielkie tomy bardzo uczonego dzieła: grubość jednego wynosi 3 cm, a drugiego 5 cm. Oba tomy są pięknie oprawione, a grubość oprawy wynosi 3 mm. Do biblioteki zakradł się robaczek – nie taki dwunożny „mól książkowy", łysy żółty, w okularach, lecz prawdziwy mały żuczek, który gryzie papier. Dziennie wierci sobie w papierze tunel długości 1cm, w oprawie zaś tylko 6 mm. W ciągu ilu dni przegryzie on te dzieła od pierwszej stronnicy do ostatniej?

Zad 30. Dziewięć osób należy obdzielić dziewięcioma wielkimi pięknymi jabłkami, ale tak, żeby każdy dostał po jabłku i żeby jednak jedno jabłko zostało w koszyku.

Zad 31. Babcia zaprosiła swoje wnuki na pierogi z jagodami. Kiedy już je przygotowała i policzyła, to się okazało, że gdyby każdemu dała po pięć pierogów, to zabraknie trzy, a gdyby każdy otrzymał po cztery pierogi, to pozostaną trzy. Ilu wnuków miała babcia?

Zad 32. Zbiornik napełniony olejem waży 56 kg. Ten sam zbiornik wypełniony benzyną waży 35 kg. Olej jest dwa razy cięższy niż benzyna. Ile waży pusty zbiornik?

Zad 33. Z jedenastu kwadratów o bokach: 1 cm, 1 cm, 2 cm, 2 cm, 2 cm, 3 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm, 6 cm, 7 cm zbuduj kwadrat.

Zadania różne.

Zad 1. Były trzy jednakowe beczułki, a w nich znajdowały się różne ilości wody. Z pierwszej beczułki przelano do drugiej i do trzeciej beczułki tyle wody, ile w każdej z nich przedtem było. Potem z drugiej beczułki przelano do trzeciej i do pierwszej beczułki tyle wody, że ilość wody w każdej z nich została podwojona. Wreszcie z trzeciej beczułki przelano do pierwszej i do drugiej beczułki tyle wody, ile w każdej z nich było, a wtedy okazało się, że w każdej z beczułek było po 24 litry wody. W czasie przelewania raz się tylko zdarzyło, że jedna z beczułek była napełniona po brzegi. Trzeba znaleźć pojemność beczułek i obliczyć, ile litrów wody było pierwotnie w każdej beczułce.

Zad 2. Do elektrowni nadeszło 500 ton węgla w 18 wagonach. Wagony zawierały ładunki po 15, 20 i 30 ton. Ile było wagonów każdego rodzaju?

Zad 3. W rodzinie jest pięcioro dzieci. Jaś jest dwa razy starszy od Tereni. Nela i Terenia razem mają dwa razy tyle lat, co Jaś. Sławek i Jaś razem mają dwa razy tyle lat, co Nela i Terenia razem. Hania, Nela i Terenia razem mają dwa razy tyle lat, co Sławek i Jaś. Hania właśnie ukończyła lat 21. Ile ma każdy z pozostałego rodzeństwa?

Zad 4. Trzech braci Bartek, Maciek i Tomek wybrało się na ryby i złowiło ich 14. Bartek złowił dwa razy mniej niż Tomek, Maciek złowił więcej ryb niż Bartek, ale mniej niż Tomek. Ile ryb złowił każdy z chłopców?

Zad 5. 16 rybaków podzieliło się na trzy grupy A, B, C. Każdy rybak z grupy A złowił 13 ryb, z grupy B 5 ryb, a z grupy C 4 ryby. Łącznie złowili 113 ryb. Ilu rybaków było w każdej grupie?

Zad 6. Pies dostrzegł w odległości 60 metrów lisa i rozpoczął pościg. Skok psa ma długość 2 m, a skok lisa 1 m. Pies daje dwa skoki w tym samym czasie, w którym lis daje trzy skoki. Ile metrów drogi musi przebyć pies, aby dogonić lisa?

Zad 7. Bartek, Maciek i Tomek złożyli się na kupno roweru, przy czym wkład każdego z nich nie przekraczał średniej arytmetycznej wkładów dwóch pozostałych. Ile pieniędzy dał Bartek, jeśli rower ten kosztował 330 zł?