CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
OD ROKU SZKOLNEGO 2014/2015

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

PRZYKŁADOWY ZESTAW ZADAŃ (A1)

W czasie trwania egzaminu zdający może korzystać z zestawu wzorów matematycznych, linijki i cyrkla oraz kalkulatora.

Czas pracy: 180 minut

GRUDZIEŃ 2013

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź

Zadanie 1. (0–1)

Dane są dwie urny z kulami, w każdej jest 5 kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i 4 kule czarne. W drugiej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno lub dwa oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, natomiast jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A. $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{7}{15}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Zadanie 2. (0–1)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{3}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

A. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ **D.** $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\dfrac{27^{665} \cdot \sqrt[3]{3^{-92}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{152}{3}}}$ jest równa

A. 3^{725} **B.** 3^{1995} **C.** 3^{2015} **D.** 3^{2045}

Zadanie 4. (0–1)

Okrąg o_1 ma równanie $x^2 + (y-1)^2 = 25$, a okrąg o_2 ma równanie $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.

B. Te okręgi są styczne.

C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_1 leży w całości wewnątrz okręgu o_2.

D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości wewnątrz okręgu o_1.

Zadanie 5. (0–1)

Dla każdego α suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha$ jest równa

A. $\sin 4\alpha$.

B. $2\sin 4\alpha$.

C. $2\sin 2\alpha \cos\alpha$.

D. $2\sin\alpha \cos 2\alpha$.

BRUDNOPIS

ZADANIA OTWARTE

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia. W zadaniach 10–18 rozwiązania należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 6. (0–2)

Liczba n jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą równanie

$$2 \cdot |x+57| = |x-39|.$$

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $|n|$.

Zadanie 7. (0–2)

Oblicz granicę ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-5n+2}{(8n+7)(n+4)}$.

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

Zadanie 8. (0–2)
Dana jest funkcja *f* określona wzorem

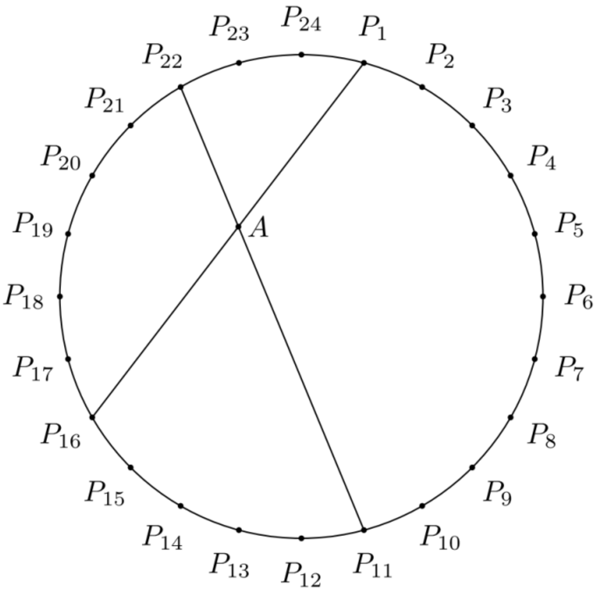
$$f(x)=\frac{x-8}{x^2+6}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=\frac{1}{2}$.
Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. (0–2)
Oblicz $\log_3\sqrt[4]{27}-\log_3\left(\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right)$.
Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (0–3)

Punkty $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{23}, P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16}.



Udowodnij, że $|\sphericalangle P_{16}AP_{11}| = 60^\circ$.

Zadanie 11. (0–3)
Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność

$$20x^2 - 24mx + 18m^2 \geq 4x + 12m - 5 .$$

Zadanie 12. (0–3)

Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k jest dane wzorem: $p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}$.

Rozważamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{1, 3, 5\}$,
- zdarzenie B polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 13. (0–3)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = mx + (2m + 3)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S = (0,0)$ i promieniu $r = 3$.

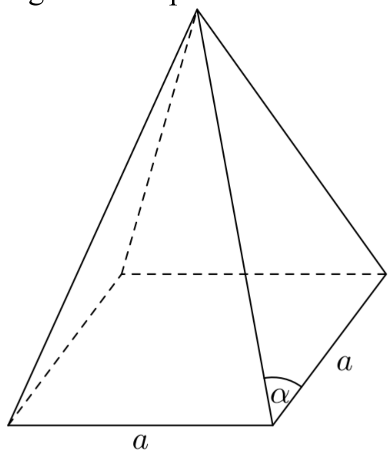
Odpowiedź: ....

Zadanie 14. (0–3)
Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie A.

Odpowiedź: ....

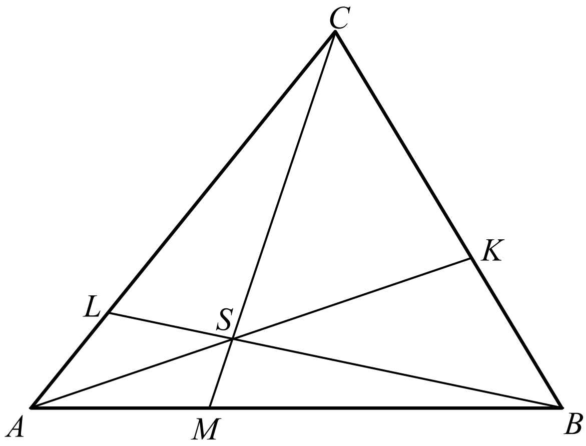
Zadanie 15. (0–3)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Kąt między krawędzią boczną, a krawędzią podstawy ma miarę $\alpha > 45°$ (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź: …………………………………………………………………………………………………….. .

Zadanie 16. (0–6)
Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym zachodzą równości $|MB| = 2 \cdot |AM|$ oraz $|LC| = 3 \cdot |AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek).



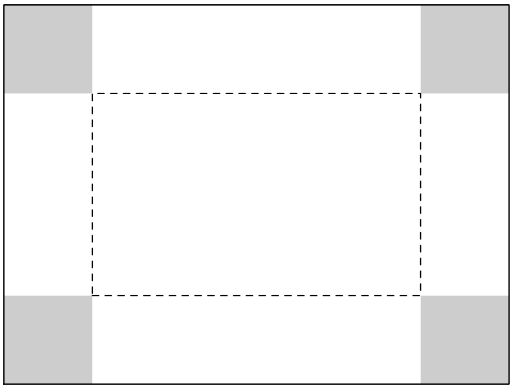
Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS.

Odpowiedź: ....

Zadanie 17. (0–6)
Oblicz, ile jest stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

Odpowiedź: ....

Zadanie 18. (0–7)
Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.

Odpowiedź: ....

BRUDNOPIS